CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera tehnologică: profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI-a

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A \in M_2(R)$

a) Să se determine matricea $X \in M_2(R)$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ care îndeplineşte condiţia AX=XA

b) Să se calculeze X^n, unde $n \in N$.

Solutie

Punctul a) $AX = \begin{pmatrix} x & y+5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ……………………………………..*2p*

$AX=XA \Rightarrow x = 5, y \in R$ ……………………………………………………….*1p*

Punctul b) $X = 5I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ………………………………………………….. *1p*

$X^n = (5I_2 + B)^n = C_n^0 (5I_2)^n + C_n^1 (5I_2)^{n-1} B + C_n^2 (5I_2)^{n-2} B^2 + \ldots\ldots\ldots$ *1p*

Dar $B^2 = O_2$, de unde rezultă că $X^n = 5^n I_2 + n \cdot 5^{n-1} B$...*1p*

$X^n = \begin{pmatrix} 5^n & n \cdot 5^{n-1} y \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in N, y \in R$ *1p*

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,m)$, $B(0,n)$ și $C(p,0)$, unde $m,n,p \in \mathbb{Z}$.

a) Arătați că dacă m,n,p sunt numere întregi consecutive, în ordine crescătoare, atunci aria triunghiului ΔABC este egală cu 0,5.

b) Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & n & m\\ b & 0 & p\end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$. Doi colegi de bancă, Andrei și Dan, joacă următorul joc: Andrei dă o valoare lui m, apoi Dan dă o valoare lui a, iarăși Andrei dă o valoare lui n, apoi Dan dă o valoare lui b, iar la final Andrei dă o valoare lui p. Câștigă Andrei dacă și numai dacă $|\det A| = 2$. Care sunt tripletele (m, n, p) care îi asigură victoria lui Andrei indiferent de alegerile lui Dan?

Solutie

a) (4p) Dacă m, n, p sunt numere întregi consecutive, atunci $n = m+1, p = m+2$ … 1p

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 1\\ 0 & m+1 & 1\\ m+2 & 0 & 1\end{vmatrix} = m+1+m(m+2)-(m+1)(m+2) = -1 \text{ … 2p}$$

Aria triunghiului ΔABC este: $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|\Delta| = \frac{1}{2}\cdot|-1| = 0,5$ … 1p

b) (3p) Calculăm determinantul matricei:

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & n & m\\ b & 0 & p\end{vmatrix} = np + abm \text{ … 1p}$$

Punem condiția $|\det A| = 2, (\forall) a, b \in \mathbb{Z} \Longrightarrow |np + abm| = 2, (\forall) a, b \in \mathbb{Z}$, atunci $m = 0$ și $|np| = 2$ … 1p

Tripletele care asigură victoria lui Andrei sunt:

$(0;1;-2), (0;-1;2), (0;2;1), (0;-1;-2), (0;1;2), (0;-2;-1), (0;-2;1), (0;2;-1)$ … 1p

3. Pentru fiecare număr natural nenul $n, n \geq 2$ se consideră funcția $f_n: (-4,4) - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{x^n}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = -\frac{1}{32}$;

b) Arătați că nu există $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$;

c) Determinați n natural nenul, $n \geq 2$, pentru care există $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$.

Solutie

a) (3p) Pentru $n = 2$, avem $f_2(x) = \frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} f_2(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x^2}+\frac{\sqrt{4-x}-2}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{4+x}+2\right)}+\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}-\frac{1}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\right)= \qquad (2p)$$

Finalizare (1p)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}\right)}=-\frac{2}{64}=-\frac{1}{32}$$

b) (2p) Pentru $n=3$, avem $f_3(x)=\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{x^3}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_3(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{x^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f_2(x)}{x}=-\infty \quad \ldots\ 1p$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_3(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{x^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f_2(x)}{x}=+\infty \quad \ldots\ 1p$$

Concluzie: Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_3(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_3(x)$, nu există $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$;

c) (2p) $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=-\frac{1}{32}$; pentru $n\geq 3\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_2(x)}{x^{n-2}}$.

(1p) Dacă n este par, atunci această limită este $-\infty$.

(1p) Dacă n este impar, atunci această limită nu există.

4. Fie funcția $f: D\to \mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{(ax+b)^2}$. Să se determine numerele reale a și b, $a>0$ astfel încât dreapta $y=\frac{1}{4}x+1$ să fie asimptotă la graficul funcției și apoi să se determine toate asimptotele funcției.

<u>Solutie</u>

Dreapta este asimptota oblică și $m=\frac{1}{4}$ iar $n=1$.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{a^2}$ și obținem $a=\pm 2$ și deci $a=2$ (2p)

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=-\frac{b}{2a}$ și obținem $b=-4$ (2p)

$x=2$ asimptotă verticală (2p)